

NJË PROCEDURË E SHPEJTË DHE E THJESHTË PËR LLOGARITJEN E FORCËS AKSIALE QË VEPRON NË DREDHAT E SOLENOIDIT TË BITERIT NEW FAST AND SIMPLE PROCEDURE FOR CALCULATION OF THE AXIAL FORCE ACTING ON THE SPIRES OF BITTER'S SOLENOID

MYRTEZA BRANESHI, ASTRIT BARDHI

Universiteti Politeknik i Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Elektrike, Sheshi Nënë Tereza, Nr. 4, Tiranë
Email: mbraneshi@gmail.com

PËRMBLEDHJE

Në këtë punim kemi paraqitur një procedurë të thjeshtë dhe të shpejtë për llogaritjen e forcave aksiale që veprojnë në dredhat e solenoidit të Biterit, d.m.th. solenoidit densiteti i rrymës i të cilit ndryshon në mënyrë të zhdrejtë me rrezën. Procedura bazohet në përdorimin e funksionit llogaritës të forcës aksiale. Këtu kemi sjellë shprehjen gjysmanalitike të funksionit llogaritës e cila përmban një term analitik që shprehet me anën e integralit eliptik të plotë të llojit të dytë dhe një integral, me funksion nënintegral të vazhdueshëm, i cili duhet të llogaritet numerikisht. Rezultatet e marra me procedurën e paraqitur i kemi ballafaquar me ato të përfutuara nga një metodë alternative. Rezultatet e marra nga të dy metodat janë në përputhje mjaft të mirë me njëra-tjetrën.

Fjalët çelës: Forca magnetike, forca aksiale, solenoidi i Biterit, funksioni llogaritës, bobinat rrethore.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present a simple and quick procedure for the calculation of axial forces acting on the spires of Bitter's solenoid, e.g. the solenoid in which current density in its spires varies inversely with the radius. The procedure is based on the use of calculating function of the axial force. We have brought a semi-analytical expression of the calculating function which involves a analytical term that is expressed by the complete elliptic integral of second kind and an integral, with continuous integrand, that have to be evaluated numerically. The results obtained by the proposed procedure are compared with ones obtained by an alternative method. Obtained results by these methods are in very good agreement with each other.

Key words: Magnetic force, axial force, Bitter's solenoid, calculating function, circular coils

1. Hyrje

Vlerësimi i forcave të bashkëveprimit në sistemet magnetike përbën një detyrë mjaft të rëndësishme për analizën dhe projektimin e tyre. Zakonisht, për llogaritjen e forcave magnetike, në hapin e parë përcaktohet shpërndarja e fushës magnetike. Më tej, njehsimi i forcave bëhet ose me ndihmën e forcës së Lorencit, ose të tensorit të sforcimeve të Maksuellit, ose nëpërmjet derivimit të energjisë së fushës magnetike në lidhje me koordinatat e përgjithësuara të sistemit. Saktësia e llogaritjes së forcave në këto raste, varet nga saktësia e llogaritjes së fushës magnetike. Metodot numerike të bazuara në elementet e fundme dhe në elementet kufitare, ndonëse përdoren gjerësisht për zgjidhjen e problemeve elektromagnetike, shfaqin probleme të saktësisë në afërsi të thyerjeve të kufijve të zonave, pavarësisht nga numri i elementeve të përdorura [1]. Për rritjen e saktësisë, disa autorë u drejtohen metodave analitike si ajo e ndarjes së variablove [2], apo metodës së pasqyrimeve konforme [3]. Një drejtim tjetër për rritjen e saktësisë është llogaritja e drejtpërdrejtë e forcave, duke eliminuar, në këtë mënyrë, hapin e llogaritjes së fushës magnetike. Për sistemin e rrymave në hapësirën ajrore llogaritja e forcave sipas këtij drejtimi sillen në llogaritjen e integraleve të kaktuara. Për shpërndarjet e rrymave më të përdorshme në praktikë, siç janë rrymat drejtvizore dhe rrethore, në disa punime sillen procedura dhe shprehje llogaritëse për vlerësimin e forcave. Kështu, në [4] jepen disa tabela dhe formula për llogaritjen e forcës aksiale ndërmjet bobinave rrethore koaksiale të tipave të

ndryshëm, kurse në [5, 6] jepen shprehjet analitike dhe gjysmanalitike të forcës, për nxjerrjen e të cilave shfrytëzohet fakti që forca është proporcionale me derivatin e induktivitetit reciprok. Theksojmë që numri i punimeve për llogaritjen e forcave ndërmjet bobinave është mjaft i vogël, i krahasuar me numrin e punimeve për llogaritjen e induktiviteve reciproke [7-9].

Në këtë punim kemi paraqitur një procedurë të shpejtë dhe efikase për llogaritjen e forcave aksiale që vepron në dredhat e solenoidit të Biterit. I projektuar për krijimin e fushave magnetike të fuqishme dhe, për rrjedhojë, për të përballuar forca të mëdha, dredhat e këtij solenoidi përfaqësojnë disqe unazore rrethore në të cilat densiteti i rrymës ndryshon në mënyrë të zhdrejtë me rrezën [10, 11]. Procedura e llogaritjes, në themelin e së cilës qëndron llogaritja e integralit të forcës, bazohet në përdorimin e kuptimit të funksionit llogaritës [12, 13] të ndërtuar për rastin e analizuar. Kemi sjellë shprehjen gjysmanalitike të funksionit llogaritës e cila përbëhet nga një term analitik dhe një term i cili duhet të llogaritet numerikisht. Termi analitik shprehet me anën e integralit eliptik të plotë të llojit të dytë, kurse termi tjetër përfaqëson një integral të njëfishtë. Funksioni nënintegral i këtij integrali është i vazhdueshëm, prandaj për llogaritjen e tij mund të përdoret një procedurë standarde e integritit numerik. Rezultatet e marra me procedurën e paraqitur i kemi ballafaquar me ato të marra me një metodë alternative, e cila bazohet në modelimin e solenoidit me anën e bashkësisë së disqeve unazore rrethore me të njëjtën rrymë. Rezultatet e marra përputhen mjaft mirë me njëra-tjetrën.

2. Shprehja e forcës aksiale

Në figurën 1(a) janë dhënë përmasat e solenoidit të Biterit me N_s dredha, nëpër të cilin rrjedh rryma I_s . Duke pranuar hapin e pështjellës p mjaft të vogël, thurjen spirale të solenoidit mund ta modelojmë me saktësi të pranueshme me anën e dredhave rrethore, ku secilën prej tyre mund ta konsiderojmë një disk unazor rrethor i cili shtrihet në planin e mesit të dredhës. Përveç kësaj, veprimin e solenoidit në tërësi mund ta barasvlerësojmë me veprimin e përcjellësit masiv unazor rrethor me të njëjtat përmasa nëpër të cilin rrjedh rryma $N_s I_s$. Për rrjedhojë, llogaritja e forcës aksiale që vepron mbi çdo dredhë të solenoidit mund të silltet në llogaritjen e forcës aksiale që ushtron përcjellësi masiv mbi diskut unazor rrethor koaksial me të dhe nëpër të cilin rrjedh rryma $I_D = I_s$, siç është treguar në figurën 1(b).

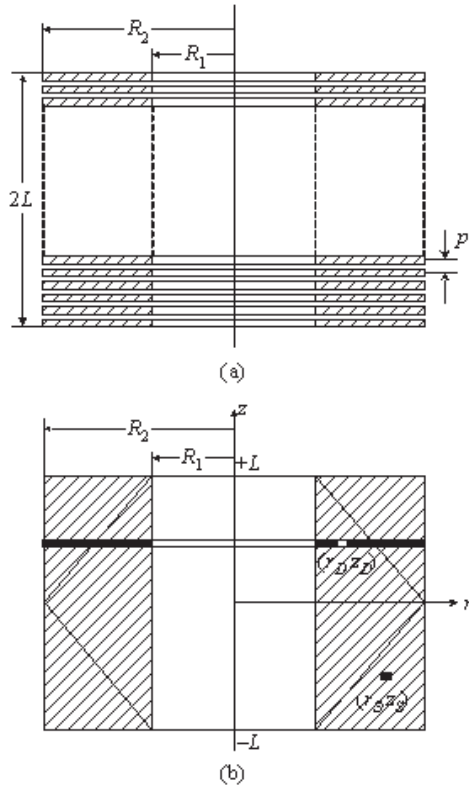


FIGURA 1. (A) SOLENOIDI I BITERIT, DHE (B) MODELI I PËRDORUR.

Në sistemin cilindrik të koordinatave të treguar në figurën 1(b) rrymat e të dy bobinave kanë vetëm komponenten azimutale, kurse shpërndarjet e densiteteve të rrymës të përcjellësit masiv j_s dhe të diskut unazor j_D janë përkatësisht

$$j_s(r_s, z_s) = \frac{J_s}{r_s}, \quad R_1 \leq r_s \leq R_2 \quad -L \leq z_s \leq L, \quad (1a)$$

$$j_D(r_D, z_D) = \frac{J_D}{r_D}, \quad R_1 \leq r_D \leq R_2 \quad (1b)$$

ku konstantet J_s dhe J_D lidhen me parametrat e përcjellësit masiv dhe të diskut unazor si më poshtë

$$J_s = \frac{N_s I_s}{2L \ln(R_2/R_1)} \quad J_D = \frac{I_D = I_s}{\ln(R_2/R_1)} \quad (2)$$

Si pasojë e simetrisë së sistemit të bobinave, forca e bashkëveprimit përmban vetëm komponenten aksiale. Për llogaritjen e kësaj force pikënisje është forca e bashkëveprimit ndërmjet dy kontureve rrethore koaksiale

$$F_K = \frac{\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} \frac{I_{K1} I_{K2} R_{K1} R_{K2} \cos \theta d\theta}{\left(R_{K1}^2 + R_{K2}^2 + H^2 - 2R_{K1} R_{K2} \cos \theta \right)^{3/2}} \quad (3)$$

ku μ_0 është konstantja magnetike e hapësirës ajrore, I_{K1} dhe I_{K2} janë rrymat e kontureve përkatësisht me rreze R_{K1} dhe R_{K2} , kurse H është largësia ndërmjet planeve të kontureve.

Forca aksiale ndërmjet bobinave të analizuar merret nga integrimi i shprehjes (3) sipas prerjeve tërthore të bobinave, ku konturi 1 zëvendësohet me konturin elementar me rrymë $j_S(r_S, z_S) dr_S dz_S$ dhe koordinata (r_S, z_S) , kurse konturi 2 zëvendësohet me konturin elementar me rrymë $j_D(r_D, z_D) dr_D$ dhe koordinata (r_D, z_D) . Shprehja e forcës, në trajtë integrale, duke pasur parasysh (1) dhe (2), rezulton

$$F = \frac{\mu_0 N_S I_S^2}{4L \ln^2(R_2/R_1)} \int_{-L}^L dz_S \int_{R_1}^{R_2} dr_S \int_{R_1}^{R_2} dr_D \int_0^{2\pi} \frac{(z_D - z_S) \cos \theta d\theta}{\sqrt{r_S^2 + r_D^2 + (z_D - z_S)^2 - 2r_S r_D \cos \theta}} \quad (4)$$

3. Procedura e propozuar

Njohja e një primitive të integralit (4) do ta sillte problemin thjesht në zëvendësimin e kufijve të integralit. Në përgjithësi, integralet e këtij tipi nuk mund të integrohen në trajtë të fundme dhe i vetmi rast i njohur prej nesh, ku forca ndërmjet bobinave rrethore shprehet në mënyrë analitike, është ai ndërmjet dy solenoidëve koaksialë. Për rastet e tjera jepen shprehje gjysmanlitike të forcës të cilat përbëhen nga dy terma, njëri analitik dhe tjetri një integral, i cili llogaritet në mënyrë numerike [5, 12, 13]. Procedura e propozuar qëndron në ndërtimin dhe përdorimin e funksionit llogaritës për rastin e analizuar, i cili është një primitivë e normuar e integralit (4). Si funksion plotësisht i përcaktuar, funksioni llogaritës mund të studiohet duke e sjellë në trajtë të përshtatshme për llogaritje. Gjithashtu për zona të caktuara të ndryshimit të variablave mund të përcaktohen shprehje të përafërta.

3.1. Përcaktimi i funksionit llogaritës

Duke pranuar R_2 si madhësi bazë të gjatësisë, në bashkësinë e primitivave të normuara të integralit (4), si funksion llogaritës zgjedhim funksionin e mëposhtëm

$$F(r, z) = \int_z^\infty d\zeta \int_r^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{2\pi \zeta \cos \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + \zeta^2 - 2R\rho \cos \theta}}$$

Forca aksiale që vepron mbi dredhë shprehet me anën e funksionit llogaritës të mësipërm si më poshtë

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{N_S I_S^2 R_2}{2L \ln^2(R_2/R_1)} \left[F\left(\frac{R_1}{R_2}, \frac{z_D + L}{R_2}\right) - F\left(\frac{R_1}{R_2}, \frac{z_D - L}{R_2}\right) \right] \quad (6)$$

3.2. Shprehja e funksionit llogaritës

Funksioni llogaritës i forcës (5) nuk mund të integrohet në trajtë të fundme për të gjitha vlerat e argumenteve të tij. Në trajtë analitike ai mund të shprehet vetëm për vlera të veçanta të tyre. Funksioni llogaritës mund të sillet në trajtën e dy termave, ku njëri term shprehet analitikisht me anën e integralit eliptik të plotë të llojit të dytë, kurse termi i dytë përfaqëson një integral të njëfishtë, me funksion nënintegral të vazhdueshëm, për integrimin e të cilit mund të përdoret një procedurë e zakonshme e integritit numerik. Mbas integritit sipas variablave ϑ , R dhe β dhe pas integritit të pjeshëm sipas ϑ , shprehja e funksionit llogaritës (5) në trajtë gjysmanlitike rezulton

$$F(r, z) = 16\pi \left[\frac{2\sqrt{r}}{k} E(k) - \frac{1}{k_1} E(k_1) - \frac{r}{k_2} E(k_2) \right] + 4\pi \int_0^{\pi/2} \left[2f(r, z, \theta) - f(1, z, \theta) - rf\left(1, \frac{z}{r}, \theta\right) \right] d\theta \quad (7)$$

ku $E(k)$ është integrali eliptik i plotë i llojit të dytë

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta \quad (8)$$

përkatësisht me modulet k , k_1 dhe k_2

$$k^2 = \frac{4r}{(1+r)^2 + z^2}, \quad k_1^2 = \frac{4}{4+z^2}, \quad k_2^2 = \frac{4r^2}{4r^2 + z^2} \quad (9)$$

Në (7) me f është shënuar funksioni

$$f(r, z, \theta) = z \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left[\tan^{-1} \frac{r \sin^2 \theta + z^2 \cos \theta}{z \sin \theta} - \tan^{-1} \frac{r \sin^2 \theta - z^2 \cos \theta}{z \sin \theta} \right] \quad (10)$$

ku

$$Y^\pm = \sqrt{1+r^2+z^2 \pm 2r \cos \theta} \quad (11)$$

Funksioni nënintegral në shprehjen (7) është i vazhdueshëm për $\vartheta = 0$. Duke zërrthyer në seri rrotull pikës $\vartheta = 0$ dhe duke u kufizuar vetëm në dy termat e parë të zërrthimit vlera e funksionit nënintegral rezulton

$$f(r, z, 0) = 2|z| + \sqrt{4+z^2} + \sqrt{4r^2+z^2} - \sqrt{(1-r)^2+z^2} - \sqrt{(1+r)^2+z^2} \quad (12)$$

Për $z = 0$ funksioni llogaritës (5) shprehet në mënyrë analitike e cila nga (7) rezulton

$$F(r, 0) = 16\pi \left[(1+r)E(k_0) - 1 - r \right] \quad (13)$$

ku moduli k_0 merret nga moduli k duke zëvendësuar në të $z = 0$

$$k_0^2 = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad (14)$$

Për $r = 0$ dhe $z = 0$ marrim vlerën e mëposhtme të funksionit F

$$F(0,0) = 8\pi(\pi - 2) \quad (15)$$

3.3. Shprehje të përafërta

Për llogaritjen e funksionit llogaritës, për zona të caktuara të variablove r dhe z , mund të shfrytëzohen shprehje të përafërta. Më poshtë do të sjellim vetëm një shprehje të përafërt e cila është e vlefshme për $0 \leq r \leq 1$. Ajo merret nga zbrëthimi në seri sipas $1/z$ të funksionit llogaritës (5)

$$F(r,z) \cong \frac{\pi^2}{2|z|^3} \left[A_0 - \frac{3 A_2}{2 z^2} + \frac{5 A_4}{8 z^4} - \frac{35 A_6}{32 z^6} \right] \quad (16)$$

ku konstantet A_0, A_2, A_4 dhe A_6 janë

$$\begin{aligned} A_0 &= (1-r^2)^2 \\ A_2 &= 1-r^2-r^4+r^6 \\ A_4 &= \frac{17}{4}-2r^2-\frac{9}{2}r^4-2r^6+\frac{17}{4}r^8 \\ A_6 &= 5-r^2-4r^4-4r^6-r^8+5r^{10} \end{aligned} \quad (17)$$

Shprehja (16) jep një gabim jo më të madh se 1.5% në llogaritjen e funksionit F për $z \geq 3$, gabim i cili zvogëlohet deri në 0.02% për $z \geq 5$, që do të thotë një përputhje në 3 shifra me vlerë. Për $z \geq 10$ përputhja midis vlerës së saktë dhe asaj të përafërt arrin në 6 shifra, ndërsa për $z \geq 20$ në 8 shifra.

4. Shembull numerik

Si shembull ilustrativ kemi analizuar solenoidin e Biterit me rreze përkatësisht $R_1 = 150$ mm, $R_2 = 300$ mm, hap të përshtjellës $p = 13$ mm dhe numër dredhash $N_s = 21$. Do të llogaritim forcën aksiale që vepron në dredhën $n_D = 13$, në qoftë se rryma e solenoidit është $I_s = 10$ kA. Gjatësia e solenoidit është

$$2L = N_s p = 273 \text{ mm}$$

kurse koordinatat e dredhës së analizuar, për sistemin koordinativ të treguar në figurën 1(b) rezulton

$$z_D = 91 \text{ mm}$$

Në bazë të kërkesave të shprehjes (6), llogaritim

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{N_s I_s^2 R_2}{2L \ln^2(R_2/R_1)} = 4.803159 \times 10^2$$

$$r = \frac{R_1}{R_2} = 0.5, z_1 = \frac{z_D + L}{R_2} = 0.758333,$$

$$z_2 = \frac{z_D - L}{R_2} = -0.151667$$

si dhe vlerat e funksionit llogaritës për vlerat e mësipërme të variablove r dhe z , të cilat në bazë të shprehjes (7) janë

$$F(r, z_1) = 1.518232 \text{ dhe } F(r, z_2) = 5.622810$$

Atëherë, madhësia e forcës që vepron në dredhën e shqyrtuar rezulton

$$F = 1.971419 \times 10^3 \text{ N} \quad (18)$$

Për të testuar procedurën e propozuar, dredhat e solenoidit i kemi modeluar me disqe unazore rrethore. Forca që vepron në diskun n_D llogaritet si shumë e forcave që ushtrojnë disqet e tjera

$$F = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_D}}^{N_s} F_n \quad (19)$$

ku F_n është forca që ushtron disku me indeksin n mbi diskun me indeksin n_D . Duke përdorur procedurën e dhënë në [12] për F_n , nga (19) marrim rezultatin e mëposhtëm të forcës që ushtrohet në dredhën me $n_D = 13$

$$F = 1.969913 \times 10^3 \text{ N}$$

e cila ndryshon nga vlera e dhënë në (18) vetëm me 0.08%.

PËRFUNDIME

Në këtë punim paraqitëm një procedurë të thjeshtë dhe efikase për llogaritjen e forcës aksiale që vepron në dredhat e solenoidit të Biterit, d.m.th. solenoidit densiteti i rrymës në dredhat e të cilit ndryshon në përpjesëtim të zhdrejtë me rrezen. Ajo konsiston në përdorimin e funksionit llogaritës të forcës aksiale të ndërtaur për këtë qëllim.

Funksioni llogaritës është sjellë në trajtën e dy termave ku njëri është shprehur analitikisht me anën e integralit eliptik të plotë të llojit të dytë, kurse tjetri është një integral i cili mund të integrohet me anën e një procedure të zakonshme të integritimit numerik. Për vlera të veçanta të variablove, për funksionin llogaritës është sjellë shprehja analitike e tij, si dhe një shprehje e përafërt.

Rezultatet e marra me anën e procedurës së paraqitur përputhen mjaft mirë me rezultatet e marra me një metodë alternative tjetër.

BIBLIOGRAFIA

1. Conway J.T., "Trigonometric Integrals for the Magnetic Field of the Coil of Rectangular Cross Section", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 42, 2006, 1538-1548.
2. Kumar P., Bauer P., "Improved Analytical Model of a Permanent-Magnet Brushless DC Motor", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 44, 2008, 2299-2309.

3. Markovic M., Jufer M., Perriard Y., "Analytical Force Determination in an Electromagnetic Actuator", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 44, 2008, 2181-2185.
4. Grover F.W., *Inductance Calculations. Working Formulas and Tables*, New York, Dover Publications, 1946.
5. Babic S., Akyel C., "Magnetic Force Calculation Between Thin Coaxial Circular Coil in Air", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 44, 2008, 445-452.
6. Shiri A., Shoulaie A., "A New Methodology for Magnetic Force Calculations Between Planar Spiral Coils", *Progress in Electromagnetic Research*, 95, 2009, 39-57.
7. Babic S., Akyel C., "New analytic-numerical solutions for the mutual inductance of two coaxial circular coils with rectangular cross section in air", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 42, No. 6, 2006, 1661-1669.
8. Babic S., Akyel C., "Calculating Mutual Inductance Between Circular Coils with Inclined Axes in Air", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 44, No. 7, 2008, 1743-1750.
9. Conway J.T., "Noncoaxial Inductance Calculations Without the Vector Potential for Axisymmetric Coils and Planar Coils", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 44, No. 4, 2008, 453-462.
10. Eyssa Y.M., Markiewicz W.D., Wise P.P., "Plastic Stress Analysis of Pulse and Resistive Magnets", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 32, No. 4, 1996, 2526-2529.
11. Montgomery D. Bruce, *Solenoid Magnet Design*, New York, Wiley-Interscience, 1969.
12. Braneshi M., Cipo P., Ahma L., Hamiti E., "Calculation of force between two coaxial disk-conductors by calculating functions", *J. of Applied Electromagnetism*, Vol. 6, No. 2, 2004, 10-23, Greece.
13. Braneshi M., Zavalani O., Pjetri A., "The use of calculating function for the evaluation of axial force between two coaxial disk coils", *International PhD-Seminar Computational Electromagnetics and Technical Applications*, Banja Luka, 2006, 21-30.