

NJË ANALIZË E GJENDJES SË SFORCUAR NË KONTAKTIN RROKULLISËS RRËSHQITËS A STRESS ANALYSIS MODEL OF THE ROLL-SLIDE CONTACT

ODHISEA KOCA^a, MIRANDA KULLOLLI^a, JORGAQ KAÇANI^b

^aDepartamenti i Mekanikës; ^bDepartamenti i Prodhim Menaxhimit, Universiteti Politeknik i Tiranës,
Sheshi “Nënë TEREZA”, Nr. 4, Tiranë; SHQIPËRI
Email: odisekoca2008@hotmail.com

PËRMBLEDHJE

Në këtë artikull paraqitet modeli, për zgjidhjen analitike të problemit të kontaktit rrokullisës rrëshqitës. Prej këtij modeli përcaktohet saktë presioni i kontaktit sipërfaqësor, duke përfshirë efektin e momenteve rrotulluese ose forcave tangjenciale. Rezultatet analitike të marra prej këtij modeli përputhen saktësisht me rezultatet eksperimentale të literaturës. Një prej rezultateve më të rëndësishme të gjetura, është që pika me sforcimin kryesor maksimal ndodhet në sipërfaqen e kontaktit. Me ndihmën e këtij modeli janë analizuar problemet e kontaktit të rrotave të dhëmbëzuara, duke marrë parasysh efektet e rrokullisjes dhe rrëshqitjes. Rezultatet analitike janë konfirmuar edhe prej gjetjeve eksperimentale në lidhje me zonat në sipërfaqet e rrotës ku ndodh dëmtimi i dhëmbit.

Fjalët çelës: Kontakt rrotullues rrëshqitës, presioni në kontakt, moment rrokullisës, sforcim kryesor, sforcim tangjencial, rrotat e dhëmbëzuara.

ABSTRACT

In this paper a model is presented which is based on an analytical solution of the roll-slide contact problem. By this solution the exact surface pressure is given, including the effects of driving moments or tangential forces. The analytical results given in this model agree well with experimental findings in the literature. As one of the important results of this model is found, that the point of maximum principal stress is located at the contact surface and is under tension. Through this important consequences arise with respect to fatigue effects in roll-slide contact problems. By the aid of this model the well known problems of gears in contact is analyzed taking roll and slide effects into account. The analytical results are confirmed by experimental

findings concerning the locations where damage occurs at the gear tooth surfaces.

Key-words: Roll-slide contact, contact pressure, driving moment, principal stress, tangential stress, gear.

HYRJE

Shumica e modeleve që përdoren për të analizuar problemet e kontaktit, në të gjitha rastet e rrokullisjes dhe rrëshqitjes, mbështeten në zgjidhjen klasike të HERTZ-it. Në këtë kuadër, ku zgjidhjes së HERTZ-it i takon vetëm një forcë normale P , këtu kemi paraqitur një model të përgjithësuar për problemet e kontaktit rrokullisës rrëshqitës, në të cilin merren parasysh, përveç forcës normale P , dhe momenti rrokullisës M ose forca tangjenciale T . Në rastin kur kemi edhe momentin M , problemi nuk është më simetrik, nuk jemi larguar nga prania e trupit elastik, vetëm se e kemi trajtuar si problem elastik jolinear, dhe rrokullisja, theksojmë edhe një herë, ka të bëjë vetëm me vetitë elastike të trupave në kontakt.

MODELI I PËRGJITHËSUAR I KONTAKTIT

Në fig. 1 është paraqitur rasti i përgjithshëm i kontaktit antimetrik me nocionet bazë të përdorura [1]. Për variablat e përdorur α dhe β kemi lidhjet e reja $x = \alpha + \beta \cdot \cos(\phi)$ dhe $t = \alpha + b \cdot \cos(\theta)$, si edhe ekuacionin themelor të problemit të kontaktit në formën:

$$\int_0^\pi p(\theta) \cdot \ln \left[\frac{(\cos(\phi) - \cos(\theta))}{1 - \cos(\theta)} \right] \cdot \sin(\theta) d\theta = \frac{f(\theta)}{K}$$
$$K = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (1)$$

ku K është moduli efektiv i elasticitetit.

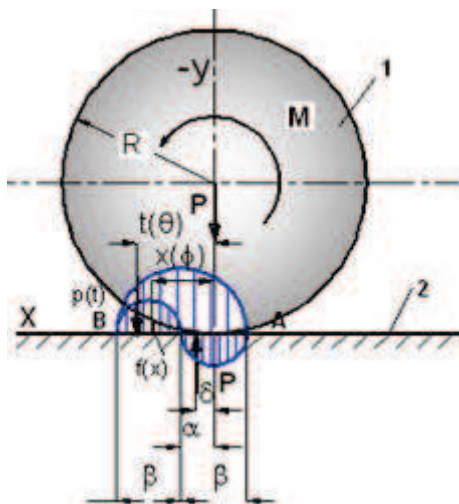


Fig. 1. Kontaktit antimetrik

Atëherë kushtet statike në kontur do të jenë të plotësuara menjëherë, d.m.th. $p(\theta) = 0$, si edhe kushti i fundit statik

$$P = \beta \int_0^\pi p(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (2)$$

Nga zbrërthimi në seri marrim:

$$p(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cdot \sin(n \cdot \theta)) \quad \text{dhe}$$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n \cdot \cos(n \cdot \theta)) \quad (3)$$

Duke zëvendësuar (3) tek (1) dhe (2) përcaktojmë koeficientet e panjohura të shpërndarjes së sforcimeve C_n në funksion të konfiguracionit B_n .

Por zgjidhja e HERTZ-it nuk mund të na japë përgjigje për rastin antimetrik, me momentin M .

Në rastin e modelit të përgjithësuar kemi funksionin e konturit $f(\phi)$ në formën:

$$f(x) = A \cdot x^2 + Bx^3 + \dots = B_0 + B_1 \cos(\phi) + B_2 \cos(2\phi) + B_3 \cos(3\phi) \quad (4)$$

dhe shpërndarja e presionit në kontakt do të jetë:

$$p(\theta) = C_1 \sin(\theta) + C_2 \sin 2(\theta) \quad (5)$$

$$C_1 = \frac{-2 \cdot 2 \cdot B_2}{\pi \cdot \beta \cdot K}; \quad C_2 = \frac{-2 \cdot 3 \cdot B_3}{\pi \cdot \beta \cdot K}; \quad C_n = 0 \quad \text{për } n \geq 3 \quad (6)$$

Duke shkruar kushtet reale të ekuilibrit për trupat në kontakt kemi përfundimisht këto koeficiente:

$$C_1 = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot \beta}; \quad C_2 = \frac{-4 \cdot (M + P \cdot \alpha)}{\pi \cdot \beta^2};$$

$$\beta^2 = \frac{P \cdot K}{A + 3 \cdot \alpha \cdot \beta} \quad (7)$$

$$4 \cdot \alpha \cdot A + 6 \cdot \alpha^2 \cdot B + 3 \cdot \beta^2 \cdot B$$

Duke pranuar lëshimin që madhësia e gjurmës varet nga forca normale P , dhe meqë P nuk ndryshon, nuk ndryshon as $\beta = \text{konst}$, dhe duke punuar me parametrat relativë kemi:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \delta_0 = \frac{\delta}{\beta}; \quad M_0 = \frac{M}{\beta}; \quad \lambda = \frac{C_2}{C_1} \quad (8)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{4 \cdot \lambda} \cdot (1 - \sqrt{1 + 8 \cdot \lambda^2}); \quad \delta_0 = \alpha_0 + \frac{\lambda}{2};$$

$$M_0 = -P \cdot \delta_0 \quad (9)$$

$$A = \frac{P \cdot K}{\beta^2} \cdot (\sqrt{1 + 8 \cdot \lambda^2}); \quad B = \frac{P \cdot K \cdot \lambda}{\beta^2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \quad (10)$$

Të gjithë këta parametra varen nga λ , që e konsiderojmë si variabël, dhe që merr parasysh momentin rrokullisës (fig. 2).

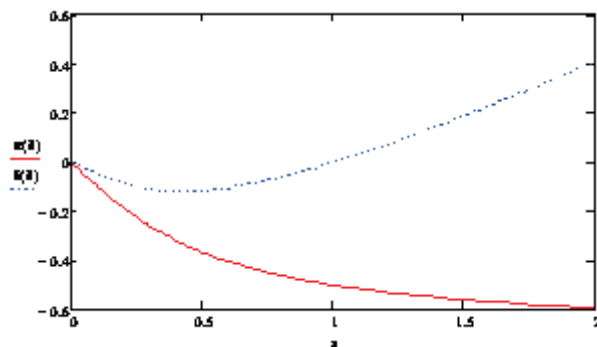


Fig. 2 Ndryshimi i parametrave të kontaktit nga parametri i ngarkimit

ZGJIDHJA E MODELIT TË PËRGJITHËSUAR

Për të kryer zgjidhjen përfundimtare të modelit të përgjithësuar kemi marrë në konsideratë tri kritere të ndryshme.

Kriteri i parë (I) është bazuar në thënien e GRIËNWUTH-it dhe është analog me atë të SOMMERFELD-it në hidrodinamikë [2], [3], [4]. Kriteri i parë tregon që rrokullisja ndodh kur forca në pjesën e pasme të gjurmës së kontaktit është zero. Kjo na sjell në rezultat që

$$\lambda = \frac{3 \cdot \pi}{8}; \quad \alpha_0 = -0.526; \quad \delta_0 = 0.062;$$

$$M_0 = -0.062 \cdot P; \quad A = 3.4787 \frac{P \cdot K}{\beta^2};$$

$$B = 1.57 \frac{P \cdot K}{\beta^3} \quad (11)$$

Nga fig. 3 duket që ky është rasti i kontaktit jo të qëndrueshëm dhe rezultatet e nxjerra përputhen me ato eksperimentale të bëra prej Bauden-Taborit për rastin e një cilindri prej gome në një plan të ngurtë, me një afërsi prej 6% [2].

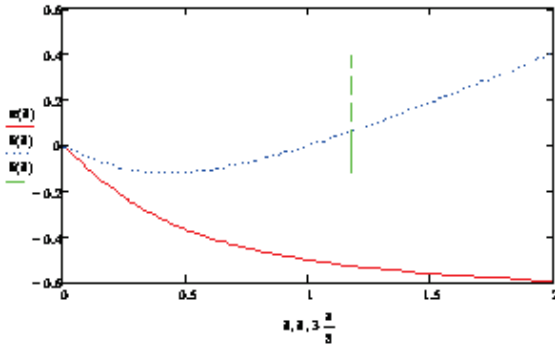


Fig. 3. Kriteri i parë, kriteri i rrokullisjes

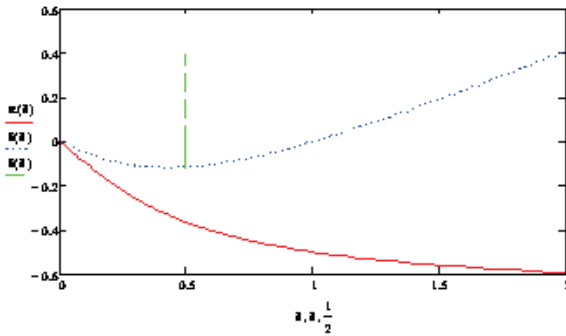


Fig. 4. Kriteri i dytë, kriteri i rrokullisjes

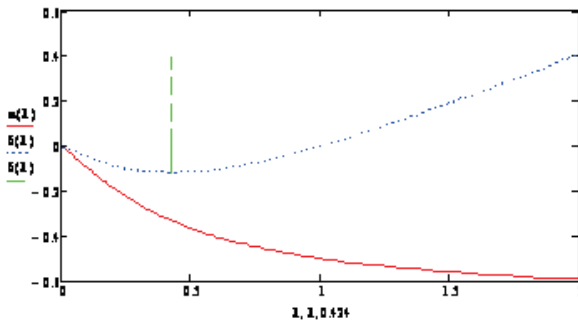


Fig. 5. Kriteri i tretë, kriteri i rrokullisjes

Kriteri i dytë (II) është bazuar në vazhdueshmërinë e funksioneve të sforcimeve dhe të deformimeve, domethënë aty ku presioni është zero edhe derivati i tij të jetë zero, që i korrespondon kriterit të REINOLD-it në hidrodinamikë [2], [3], [4], [5]. Kriteri i dytë na sjell në rezultatin që

$$\lambda = \frac{1}{2}; \quad \alpha_0 = -0.366; \quad \delta_0 = -0.116;$$

$$M_0 = 0.116 \cdot P; \quad A = 1.732 \frac{P \cdot K}{\beta^2}; \quad B = 0.666 \frac{P \cdot K}{\beta^3} \quad (12)$$

Nga fig. 4 duket që ky është rasti i kontaktit të qëndrueshëm dhe rezultatet e nxjerra përputhen me ato eksperimentale të bëra tek rrotat e vagonëve të trenave, me një afërsi prej 5%.

Kriteri i tretë (III) është bazuar në ngopjen e kontaktit për sa i përket momentit rrokullisës, domethënë momenti ngacmues arrin vlerën maksimale, që do të thotë derivati i parë i tij është zero [3], [6].

Kriteri III na sjell në rezultatin që

$$\lambda = 0.424; \quad \alpha_0 = -0.331; \quad \delta_0 = -0.119;$$

$$M_0 = 0.119 \cdot P; \quad A = 1.56 \frac{P \cdot K}{\beta^2}; \quad B = 0.565 \frac{P \cdot K}{\beta^3} \quad (13)$$

Nga fig. 5 duket që ky është rasti i kontaktit të qëndrueshëm dhe rezultatet e nxjerra përputhen akoma më mirë me ato eksperimentale të bëra te rrotat e vagonëve të trenave, me një afërsi prej 3%.

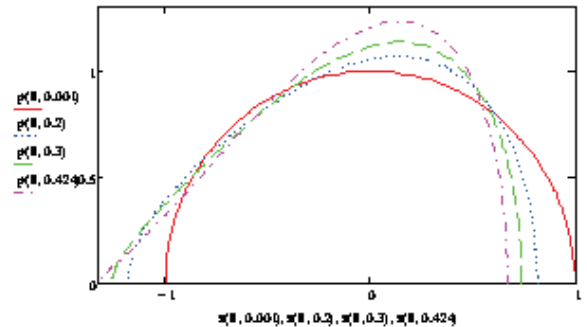


Fig. 6. Efekti i momentit rrokullisës M në presionin e kontaktit, nga $\lambda=0$ zgjidhja e HERTZ-it deri në $\lambda=0.424$, kur arrin ngopja e kontaktit.

PRESIONI NË KONTAKT

Në fig. 6 duket fakti që me vendosjen e momentit M , fillon edhe ndryshon presioni në kontakt. Presioni në kontakt bëhet asimetrik.

Vlera kur arrihet momenti maksimal, presioni bëhet $p_{max} = 1.23 \cdot p_{max\text{HERTZ}}$, domethënë $\lambda = 0.424$ dhe ndodhet nga pas pikës geometrike të kontaktit,

domethënë $\theta = 62^{\circ}$ ose $x = 0.138 \cdot \beta$, kurse δ është në drejtim të lëvizjes.

Në figurën 7 është paraqitur presioni përfundimtar në kontakt dhe në rastin e rëshqitjes, po këtë pamje ka edhe presioni tangjencial.

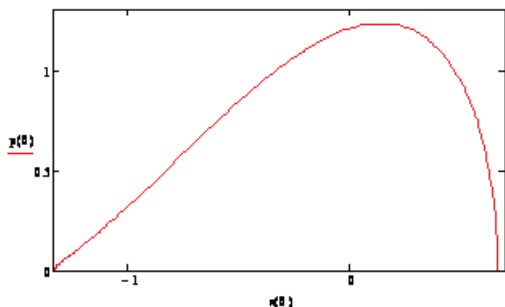


Fig. 7. Presioni përfundimtar pas vendosjes së momentit.

HUMBJA E QËNDRUESHMËRISË. FORCA KRITIKE

$P_{kritike}$
Llogaritjen e forcës kritike P e realizojmë me metodën energjetike, duke pranuar një formën e shmangies

$$x = f \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{R}\right)$$

$$\text{Momenti i inercisë: } I = \frac{b \cdot (2 \cdot R \cdot \sin(\phi))^2}{12}$$

$$x' = f \cdot \frac{\pi}{R} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{R}\right) \quad x'' = -f \cdot \frac{\pi^2}{R^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{R}\right)$$

$$P_{kritike} = \frac{\int_0^R x''^2 E \cdot I \cdot dy}{\int_0^R x' \cdot dy} \quad P_{kritike} = 1.179 \cdot E \cdot b^2$$

Forca kritike varet nga materiali dhe katrori i gjerësisë së cilindrit.

SFORCIMET NË AFËRSI TË ZONËS SË KONTAKTIT

Përcaktimin e sforcimeve e kryejmë me koordinatat eliptike dhe me anën e funksioneve të sforcimeve [7], [8], [9].

$$z = \beta \cdot \cosh(\zeta); \quad x(\xi, \eta) = \beta \cdot \cosh(\xi) \cdot \cos(\eta);$$

$$y(\xi, \eta) = \beta \cdot \sinh(\xi) \cdot \sin(\eta)$$

$$F(z) = \int_a^b \frac{i \cdot p(t)}{\pi \cdot (t-z)} dt = \Phi(\zeta) + i \cdot \Psi(\zeta) = -C_1 \cdot i \cdot e^{-\zeta} - C_2 \cdot i \cdot e^{-2\zeta}$$

SFORCIMET nga forcat normale:

$$\sigma_{xx_{C_1}}(\eta, \xi) = -C_1 \sin(\eta) \cdot \left[e^{-\xi} - \sinh(\xi) \cdot \left(1 - \frac{\sinh(2 \cdot \xi)}{\cosh(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \eta)} \right) \right]$$

$$\sigma_{xx_{C_2}}(\eta, \xi) = -C_2 \sin(2\eta) \cdot e^{-\xi} \cdot \left[e^{-\xi} + \frac{\sinh(\xi) - (2 \cdot \cos(2 \cdot \eta) - 1 - e^{-2\xi})}{\cosh(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \eta)} \right]$$

$$\sigma_{xx_N}(\eta, \xi) = \sigma_{xx_{C_1}}(\eta, \xi) + \sigma_{xx_{C_2}}(\eta, \xi)$$

$$\sigma_{yy_{C_1}}(\eta, \xi) = -C_1 \sin(\eta) \cdot \left[e^{-\xi} - \sinh(\xi) \cdot \left(1 - \frac{\sinh(2 \cdot \xi)}{\cosh(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \eta)} \right) \right]$$

$$\sigma_{yy_{C_2}}(\eta, \xi) = -C_2 \sin(2\eta) \cdot e^{-\xi} \cdot \left[e^{-\xi} - \frac{\sinh(\xi) \cdot (2 \cdot \cos(2 \cdot \eta) - 1 - e^{-2\xi})}{\cosh(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \eta)} \right]$$

$$\sigma_{yy_N}(\eta, \xi) = \sigma_{yy_{C_1}}(\eta, \xi) + \sigma_{yy_{C_2}}(\eta, \xi)$$

$$\sigma_{xy_{C_1}}(\eta, \xi) = -C_1 \sin(\eta) \cdot \sin(\eta) \cdot \frac{\sinh(\xi) \sin(2 \cdot \xi)}{\cosh(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \eta)}$$

$$\sigma_{xy_{C_2}}(\eta, \xi) = -2C_2 \sin(\eta) \cdot \sinh(\xi) \cdot e^{-\xi} \cdot \left[\frac{\sinh(3\eta) - e^{-2\xi} \cdot \sin(\eta)}{\cosh(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \eta)} \right]$$

$$\sigma_{xy_N}(\eta, \xi) = \sigma_{xy_{C_1}}(\eta, \xi) + \sigma_{xy_{C_2}}(\eta, \xi)$$

ZBATIM I KËTIJ MODELI TEK DHËMBËT E RROTAVE ME DHËMBË

Në dhëmbët e rrotave me dhëmbë ndodh fenomeni i skelfitjes ose pitingut, i cili shkaktohet nga sforcimi maksimal në sipërfaqen, që është në tërheqje, në fund të gjurmës së kontaktit dhe jo për ndonjë arsye tjetër. Vlera maksimale e këtij sforcimi është llogaritur:

$$\sigma_{max} = 3 \cdot f \cdot p_{HERTZ}, \text{ ku } f \text{ është koeficienti i fërkimit.}$$

KONKLuzionET

- Fërkimi rrokullisës shpjegohet vetëm me vetitë elastike të materialeve dhe
- është një problem elastik jolinear.
- Shpërndarja e presionit dhe forca e fërkimit janë shkaktare të dëmtimit të trupave në kontakt.
- Dëmtimi vjen gjithmonë nga sipërfaqja, se në të kemi sforcimet maksimale në tërheqje.

LITERATURA

1. Boicu, N. (1977), *Contactul elastic linear*, Editura tehnica, Bucuresti.
2. Bowden, F.P. and Tabor, D. (1954 and 1964), *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford University Press Vols.1 and 2, London.
3. Kragelskii, Q.Q. (1965), *Friction and Wear*, Butterworths, London.

- 4.Szeri, A. Z. (1980), *Tribology, Friction, Lubrication, and Wear*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington-New York and London.
- 5.Tallian, T.E. (1992), *Failure Atlas for Hertz Contact Machine Elements*, ASME Press, New York.
- 6.Johnson, K.L. and Gray, C.G. (1975), "Development of corrugations on surfaces in rolling contact", *Proc. Inst. Mech. Eng.*(London), pp 189-567.
- 7.Kaufman, H.N. (1983), "Sliding Bearing Damage, CRC HANDBOOK of Lubrication" (*Theory and Practice of Tribology*), Vol.2 pp 477-537, CRC Press.Inc.Boca Raton, Florida.
- 8.Teodoresku, P.P. (1966). *Probleme Plane in Teoria Elasticitati*, Vol. 2, Editura tehnica, Bucuresti.
- 9.Yamaguchi, Y. (1990), *Tribology of Plastic Materials*, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York and Tokyo.
10. Polzer, G., Meissner, F. (1983,1984), *Grundlagen zu Reibung Und Verschleiss*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, Moskva.