

---

## HYPERCUBIC SYMMETRY BREAKING EFFECTS ON PI AND RHO MESON MASSES FROM SIMULATIONS WITH MINIMALLY DOUBLED ACTIONS

### NDIKIMI I THYERJES SE SIMETRISE HIPERKUBIKE NE MASAT E PI DHE RHO MESONEVE PREJ SIMULIMEVE ME VEPRIME MINIMALISHT TE DUBLUARA

RUDINA ZEQRILLARI, INVA BUZI, ARTAN BORIÇI

Departamenti i Fizikës, Fakulteti i Shkencave Natyrore, Universiteti i Tiranës, Bul. Zog I, Tiranë, Shqipëri

Email: rudinazeqirllari@gmail.com

AKTET IV, 3: 392 - 396, 2011

#### PERMBLEDHJE

Simulimet numerike të kromodinamikës rrjetore janë mjeti i vetëm për të marrë informacion mbi masat e hadroneve apo fazat e shpërhapjes. Teoritë kalibruese rrjetore me fermione janë përafrime diskrete të teorisë së bashkëveprimeve të forta (QCD). Historikisht ka qënë e pamundur të ndërtohet një teori fermionike kirale pa dublant. Së fundmi, është rigjallëruar ideja e fermioneve me dublim minimal, të cilat thejnë simetrinë hiperkubike të operatorit rrjetor. Në këtë studim testohen efektet e thyerjes së simetrisë hiperkubike për fermionet kirale Boriçi – Creutz, duke llogaritur masat e pi dhe rho-mezoneve dhe duke i krahasuar drejtpërdrejtë ato me vlerat eksperimentale. Llogaritjet paraprake në vëllime të vogla  $(0.8 \text{ fm})^3$  dhe konstante rrjete 0.1 fm, tregojnë një shmangie 13% të masës së rho – mezonit prej asaj eksperimentale. **Fjalët kyçe:** dublim minimal, fermione kirale, spektër hadronesh, kromodinamikë rrjetore, përhapës i kuarkeve.

#### SUMMARY

Numerical simulations of lattice QCD are the only tool to gain information on the hadron masses and scattering phases. Lattice gauge theories with fermions are discrete approximations of the theory of strong interactions (QCD). Historically, it has been impossible to build a chiral fermions theory, without doubled fermions. Recently, the idea of minimally doubled fermions, which violate the hypercubic symmetry of the lattice operator, has been revived. In this work, we test the hypercubic symmetry breaking effects using Boriçi – Creutz fermions. We compute the mesons masses and compare them with the experimental values. Preliminary results on small volumes  $(0.8 \text{ fm})^3$  and lattice spacing 0.1 fm, show a 13% deviation of the rho – mesons mass from the experimental value.

**Key words:** chiral fermions, minimally doubled fermions, hadron spectroscopy, quantum chromodynamics.

---

#### HYRJE

Kromodinamika kuantike (QCD) është teoria e bashkëveprimeve të forta. Ajo është një teori e bashkëveprimit të kuarkeve dhe gluoneve, të cilat përbëjnë lëndën hadronike. Kjo teori ka qënë shumë e suksesshme në parashikimin e mjaft fenomeneve fizike, që përfshijnë transferime të mëdha impulsi. Në këtë regjim

konstantja e çiftimit është e vogël dhe teoria e perturbimeve bëhet një mjet i besueshëm. Nga ana tjetër, në rendin e energjisë së lidhjes hadronike, konstantja e çiftimit është e rendit njësi dhe metodat perturbative dështojnë. Në këtë zonë, kromodinamika rrjetore siguron një mjet jo – perturbativ për të llogaritur spektrin hadronik dhe elementët

matricore të çdo operatori në këto gjendje hadronike. QCD rrjetore mund të përdoret për të treguar mekanizmin e mbyllësisë dhe thyerjes së simetrisë kirale, rolin e topologjisë dhe vetitë e ekuilibrit të QCD në temperatura të fundme.

Në vitin 1974, Kenneth Wilson vërtetoi mbyllësinë e kuarkeve në regjimin e çiftimeve shumë të forta [11]. Formulimi prej tij i kromodinamikës në rrjetë është në gjendje të shpjegojë thyerjen spontane të simetrisë kirale dhe llogaritjen e spektrit të hadroneve me saktësi tashmë të rendit një përqind.

Propozimi i tij përfshin dy modifikime bazë të teorisë së fushës:

1. Hapësira e Minkovskit zëvendësohet me atë Euklidiane, pra kemi të bëjmë me një rrotullim të Wick-ut të boshtit të kohës me kënd  $\pi/2$  ;

2. Hapësirë - koha e vazhduar zëvendësohet prej një rrjete të rregullt hiper - kubike me distancë rrjetore  $a$ .

Gjithsesi, kjo teori elegante e ka një çmim: në kufirin e vazhduar shfaqet dukuria e quajtur *dublimi i fermioneve*.

Përpjekjet për të ndërtuar një teori fermionike rrjetore pa dublantë dhe me simetri kirale janë dekurajuar nga teorema Nielsen-Ninomiya [8]. Kjo teoremë pohon se është e pamundur të formulohet në rrjetë një teori fermionike që gëzon njëkohësisht vetitë e mëposhtme:

- (i) simetrinë kirale
- (ii) lokalitetin
- (iii) mungesën e dublantit
- (iv) simetrinë kubike

Kjo teoremë mund të shfrytëzohet për të ndërtuar fermione kirale që çenojnë një prej simetrive të mësipërme. Lokaliteti është veti e pacënueshme sepse një teori jo lokale është e parinormueshme. Në rast se nuk duam dublant duhet të çenojmë simetrinë kubike.

Historikisht ka qenë e pamundur të ndërtohet një teori fermionike kirale pa dublant. Përpjekja e parë prej Karsten dhe Wilczek (1987) solli një teori kirale me një dublant të vetëm [10]. Më vonë ishte Creutz (2007) që

përdori analogjinë me strukturën elektronike të grafitit për të përfutur fermione kirale me një dublant në rrjeta heksagonale [6]. Të riformuluara në rrjeta ortogonale përfutohen fermionet Boriçi – Creutz, që karakterizohen nga operatori i Dirac - ut [4]:

$$D(p) = \sum_{\mu} i\gamma_{\mu} \sin p_{\mu} + \sum_{\mu} i\gamma'_{\mu} (\cos p_{\mu} - 1)$$

Ky operator ka dy zero: (0, 0, 0, 0) dhe  $(\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2)$ . Pra këto lloj fermionesh kanë dublim minimal.

Motivimi i punës tonë është testimi i efekteve të thyerjes së simetrisë kubike në operatorin e mësipërm të Dirac-ut [1]. Një testim fillestar është dhënë dhe janë marrë rezultate paraprake të kënaqshme [3]. Në këtë punim ne ritejtojmë këto lloj fermionesh në llogaritjen e masës së pi dhe rho – mezonit me një statistikë më të lartë, por në rrjetë me vëllim më të vogël  $0.8^3$  dhe konstante të njëjtë rrjetore si në referencën [3].

### SPEKTROSKOPIA E HADRONEVE

Në këtë studim testohen pikërisht fermionet kirale Boriçi – Creutz dhe prezantohen rezultatet e marra për masat e mezoneve nga llogaritjet me këtë lloj operator Dirac-u. Kemi gjeneruar një sërë konfiguracionesh të fushave kalibruese me anë të funksionit të veprimit të Wilson-it:

$$S_g[U] = -\beta \sum_{\mu\nu i} \frac{1}{3} \text{Re Tr } U_{\mu,i} U_{\nu,i+\mu} U_{\mu,i+\nu}^{-1} U_{\nu,i}^{-1}$$

për  $\beta = 6$ , në një rrjetë me përmasa  $8^3 \times 16$ . Vlera e konstantes së rrjetës korresponduese është  $a^{-1} = 2 \text{ GeV}$ .

Përhapësit e kuarkeve, ose funksionet e Green-it të operatorit të Dirac-ut, përcaktohen me

anë të barazimit:

$$\sum_{i'\alpha'a'} D_{\alpha\alpha',ii'}^{aa'} G_{\alpha'\beta',i'j}^{a'b} [U] = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta^{ab}$$

ku  $ab$  janë indekset spinore ose të Dirac-ut dhe  $abc$  janë ato të ngjyrës.

Për 40 konfiguracione janë llogaritur përhapësit e kuarkeve për një burim pikësor për të gjitha kombinimet e mundshme ngjyrë – spin, duke zgjidhur sistemin e mësipërm me

anë të algoritmit të gradientëve të konjuguar për sisteme lineare të zhvendosura [9]. Algoritmi i sipërpërmendur zgjidh sistemin  $(A+m)x = b$  njëkohësisht për vlera të ndryshme të  $m$ , duke përdorur po aq veprime matricore sa nevojiten për zgjidhjen e një sistemi të vetëm. Konkretisht janë llogaritur përhapësit për masa të kuarkeve  $am_q = 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09$  dhe  $0.1$ . Më pas gjenden përhapësit e hadroneve, si kombinim i përhapësve të kuarkeve dhe me anë të tyre llogariten masat e pi dhe rho – mezonit.

Llogaritja e masave të hadroneve bëhet duke përkufizuar operatorët interpolues të tyre. Përhapësit e hadroneve nuk janë gjë tjetër veçse funksionet e korrelimit të operatorëve interpolues të tyre:  $G_{ij} = O_i O_j'$  ku  $i, j$  janë nyje të rrjetës.

Operatori që krijon një pi – mezon është:  $O_\pi = \bar{\psi} \gamma_5 \psi$ . Në rastin tonë kemi dy kuarke të degjeneruar dhe simetria kirale është e aromizuar. Prandaj:

$$O_\pi = \bar{u} \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_5 d$$

Pra kemi të bëjmë me operatorin e pi – mezonit neutral. Për të njejtën arsye, operatori i rho – mezonit  $O_\rho = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$  do të jepet me anë të:

$$O_\rho = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d$$

Për të veçuar masat në spektrin e hadroneve shumojmë përhapësit sipas indekseve të 3-hapësirës në mënyrë që përhapësit të mos varen prej 3-impulseve. Për rrjeta me kushte kufitare periodike, përhapësit e mezoneve mund të modelohen në formën:

$$G_{t,t_0} = \frac{1}{2} c_1 \cosh am_1(t-t_0-L/2) + \frac{1}{2} c_2 \cosh am_2(t-t_0-L/2)$$

ku  $L$  është madhësia lineare e rrjetës sipas drejtimit kohor (ose të katërt),  $m_1$  është masa e gjendjes themelore dhe  $m_2$  është masa e gjendjes së parë të ngacmuar.

Kujtojmë se për llogaritjen e përhapësve të kuarkeve mund të përdorim një burim pikësor në  $t_0 = (0, 0, 0, 1)$ . Masat efektive të hadroneve përcaktohen duke zgjidhur barazimet jo-lineare

për gjendjen bazë:

$$\frac{G_{t+1,1}}{G_t} = \frac{\cosh am(t-L/2)}{\cosh am(t-1-L/2)}, t=1, \dots, L$$

$$\frac{G_{t+1,1}}{G_t} = \frac{\sinh am(t-L/2)}{\sinh am(t-1-L/2)}, t=1, \dots, L$$

përkatësisht për mezonet dhe barjonet në lidhje me  $am$ .

Gabimet e masave janë vlerësuar me anë të metodës Jackknife.

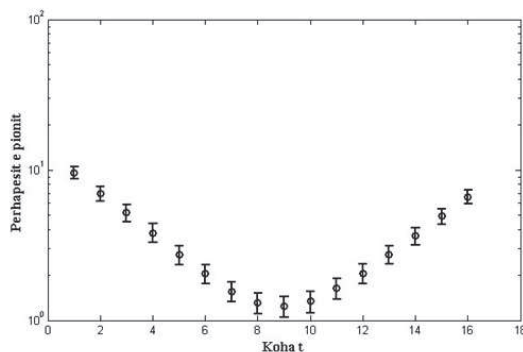


Fig. 1: Përhapësit e pion-it në varësi të kohës euclidiane

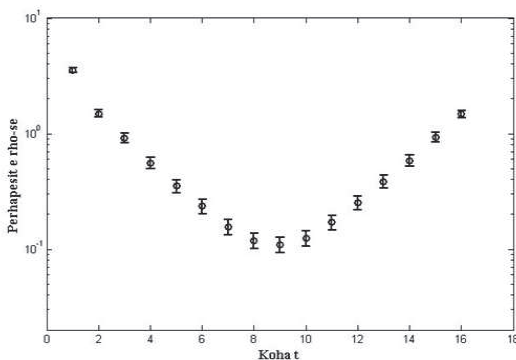
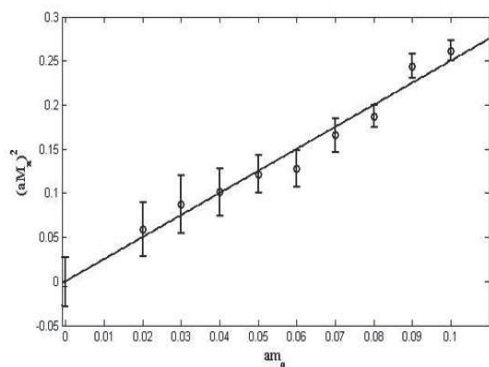


Fig. 2: Përhapësit e rho-së në varësi të kohës euclidiane

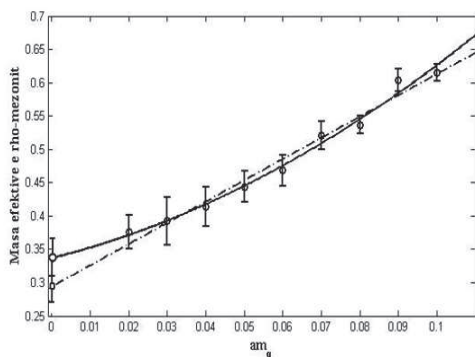
### REZULTATE DHE DISKUTIME

Më poshtë, paraqiten grafiksht rezultatet e marra për spektrin e mezoneve. Në figurat 1 dhe 2 janë paraqitur përkatësisht përhapësit e pion-it dhe rho – së. Grafikët paraqitës së masave të pionit dhe rho – mezonit janë dhënë në Figurat 3 dhe 4. Tek Figura 3 tregohet sjellja e katrorit të masës së pionit

ndaj masës së zhveshur të kuarkeve. Siç vihet re, masa e pion-it shkon drejt zeros në kufirin kiral.



**Fig. 3:** Varësia e masës efektive të pion-it ndaj masës së zhveshur të kuarkeve



**Fig. 4:** Varësia e masës efektive të rho-së ndaj masës së kuarkeve

Masa e ekstrapoluar e pionit për masë quarku zero, është 0.0044, e cila në njësi përmasore jep një masë pioni 132.6 MeV, ndërkohë që masa eksperimentale e pionit është 135 MeV. Pra llogaritjet e kryera përputhen me ekperimentin brenda gabimit statistikor, që është rreth 51.4 MeV. Vemë re se kemi shmangie nga zero, një tregues ky i thyerjes së simetrisë kubike. Arsyeja qëndron se për fermionet në fjalë, pi – mezoni neutral duhet të jetë ekzaktesisht zero në kufirin kiral. Mbetet të shihet në të ardhmen sjellja e pi – mezoneve të ngarkuara duke përdorur operatorët përkatës [7], si dhe të shihet efekti

në rrjeta më të mëdha. Në fakt, rrjetat më të mëdha do të identifikojnë nëse shmangia është pasojë e madhësisë së kufizuar së rrjetës tonë apo pasojë e thyerjes së simetrisë hiper – kubike. Ndërkohë, që në rastin e rho - mezonit shohim se masa e marrë pas ekstrapolimit linear në zero, është:

$$(0.2943 * 2 \text{ GeV}) \pm (0.0257 * 2 \text{ GeV}) = 588.6 \pm 51.4 \text{ MeV}$$

Duke ditur se vlera eksperimentale e rho – së është 770 MeV, vihet re që masa e saj e llogaritur me anë të fermioneve Boriçi – Creutz ka një shmangie rreth 130 MeV nga ajo eksperimentale. Në rastin e një ekstrapolimi kuadratik, masa e gjetur është:

$$(0.33739 * 2 \text{ GeV}) \pm (0.0257 * 2 \text{ GeV}) = 674.78 \pm 51.4 \text{ MeV}$$

Vihet re se masa e llogaritur është  $2\sigma$  larg ekperimentit ose 100 MeV në rastin më të mirë. Pikërisht kjo shmangie përbën dhe masën e thyerjes së simetrisë kubike, së bashku me efektin e rrjetës së vogël  $(0.8 \text{ fm})^3$ . Një vlerësim më i saktë i saj do të vinte nëse numri i konfiguracioneve statistikiht të pavarura do të rritej nga 40, në të paktën 100 ose më shumë të tilla. Gjithsesi për të marrë një vlerë sa më afër vlerës eksperimentale të pion-it (135 MeV), do të duhet që simetria e izospinit të thyhet prej efekteve elektromagnetike, që nuk janë prezente në këtë punim. Ndoshta thyerja e simetrisë kubike jep efekte të ngjashme. Sidoqoftë, simetria kubike duhet rivendosur duke shtuar kufiza të tjera në veprimin tonë. Një studim i tillë është në zhvillim prej autorëve të referencës [5]. Mbetet që ky veprim i korrigjuar të testohet dhe implentohet në rrjeta më të mëdha, çka përbën një nga synimet tona në të ardhmen.

## BIBLIOGRAFIA

1. Bedaque P. F, Buchoff M. I, Tiburzi B. C (2008) A. Walker-Loud, Broken Symmetries from Minimally Doubled Fermions, Phys. Lett. B662:449 – 455
2. Boriçi A (1996) Krylov subspace methods in lattice QCD, PhD thesis, ETH - Zurich

3. Boriçi A (2008) Minimally Doubled Fermion Revival, PoS LATTICE2008:231
4. Boriçi A (2008) Phys. Rev. D78 074504, arXiv:0712.4401
5. Capitani S, Creutz M, Weber J, Wittig H (2010) Renormalization of minimally doubled fermions, arXiv:1006.2009v1 [hep-lat]
6. Creutz M (2008) Four-dimensional graphene and chiral fermions, JHEP 0804, 017
7. Creutz M (2010) Minimal doubling and point splitting, <http://xxx.lanl.gov/abs/1009.3154>
8. Nielsen H. B, Ninomiya M (1981) Nucl.Phys.B185:20
9. ] Neuberger H (1999) Minimizing storage in implementations of the overlap lattice-Dirac operator, Int.J. Mod.Phys. C10, 1051-1058
10. Wiczek F (1987) Phys. Rev. Lett. 59, 2397
11. Wilson K. G (1974) Phys.Rev.D10:2445-2459.