AKTET
Journal of Institute Alb-Shkenca
Revistë Shkencore e Institutit Alb-Shkenca

ISSN 2073-2244
www.alb-shkenca.org
Copyright © Institute Alb-Shkenca

OPERATORËT $2-k^*$ PARANORMALË DHE OPERATORËT PARANORMALË

SHQIPE LOHAJ
FIEK-Prishtinë, KOSOVA
shqipe_lohaj@hotmail.com

AKTET V, 2: 343 - 348, 2012

PËRMBLEDHJE

Në këtë punim është përkufizuar klasa e operatorëve $2-k^*$ paranormal dhe janë treguar disa veti të kësaj klase në hapësirat e Hilbertit. Është vërtetuar se një operator unitarisht ekuivalent me operatorin $2-k^*$ paranormal është operator $2-k^*$ paranormal dhe nëse T është operator $2-k^*$ paranormal, që komuton me një operator izometrik S, atëherë, prodhimi TS është poashtu operator $2-k^*$ paranormal.

Fjalë kyçe: Paranormal operators $2-k^*$ paranormal operators

1. HYRJE

Shënojmë me *H* hapësirën e Hilbertit dhe me *L(H)* hapësirën e të gjithë operatorëve linear dhe të kufizuar në hapësirën e Hilbertit *H.* Për operatorin $T \in L(H)$ themi se është *paranormal*, ose operator nga klasa (N), nëse $\|Tx\|^2 \le \|T^2x\|, (x \in H, \|x\|=1)$ dhe * *paranormal* nëse, $\|T^*x\|^2 \le \|T^2x\|$ $(x \in H, \|x\|=1)$. Lidhur me këto klasë të operatorëve kanë punuar shumë autorë të njohur si T. Furuta, S.C.Arora, J.K. Thukral, etj.

Operatori $T \in L(H)$ quhet k *-paranormal* ose operator nga klasa $(N;\ k)$, nëse $\|Tx\|^k \le \|T^kx\|$ $(x \in H, \|x\|=1)$ dhe ngjashëm operatori $T \in L(H)$ quhet k^* *-paranormal* ose operator nga klasa $(N;\ k^*)$, nëse $\|T^*x\|^k \le \|T^kx\|$ $(x \in H, \|x\|=1)$.

Është treguar se çdo operator paranormalë është operator k -paranormalë.

Duke u bazuar në këto klasë të operatorëve si dhe në vetitë e tyre mjaft të mira po përkufizojmë dy klasë të reja, klasën e operatorëve $2-k^*$ paranormalë dhe klasën e operatorëve $2-k$ paranormalë. Për një operator $T \in L(H)$ themi se është $2-k^*$ *paranormal* nëse $\|T^{*2}x\|^k \le \|T^kx\|^2$ $(x \in H, \|x\|=1)$.

Ngjashëm, për një operator $T \in L(H)$ themi se është $2-k$ *paranormal* nëse $\|T^2x\|^k \le \|T^kx\|^2$ $(x \in H, \|x\|=1)$. Operatori T i takon klasës (M,k), atëherë dhe vetëm atëherë, kur $T^{*k}T^k \ge (T^*T)^k$ ($k \ge 2$) [5].

Teorema 1.1 (Jobarazimi i Hölder-MrCarthy) [2] Le të jetë A operator pozitiv në hapësirën e Hilbertit H. Atëherë, vlejnë pohimet e mëposhtme

1. $\left(A^{\lambda}x,x\right)\geq\left(Ax,x\right)^{\lambda}$
$\left(\lambda>1,x\in H,\|x\|=1\right)$.
2. $\left(A^{\lambda}x,x\right)\leq\left(Ax,x\right)^{\lambda}$
$\left(\lambda\in[0,1],x\in H,\|x\|=1\right)$.
3. Nëse A është operator invertibil, atëherë
$\left(A^{\lambda}x,x\right)\leq\left(Ax,x\right)^{\lambda}$
$\left(\lambda<0,x\in H,\|x\|=1\right)$.

Pohimet 1., 2. dhe 3. janë ekuivalente me pohimet a), b) dhe c) respektivisht

a) $\left(A^{\lambda}x,x\right)\geq\left(Ax,x\right)^{\lambda}\|x\|^{2(1-\lambda)}$
$\left(\lambda>1,x\in H,\right)$.

b) $\left(A^{\lambda}x,x\right)\leq\left(Ax,x\right)^{\lambda}\|x\|^{2(1-\lambda)}$
$\left(\lambda\in[0,1],x\in H,\right)$.

c) Nëse A është operator invertibil, atëherë
$\left(A^{\lambda}x,x\right)\leq\left(Ax,x\right)^{\lambda}\|x\|^{2(1-\lambda)}$
$\left(\lambda<0,x\in H,\|x\|=1\right)$.

2. Operatorët $2-k^*$ paranormalë

Nuk është vështirë të tregohet se çdo izometri është operator hipernormal dmth $\|T^*x\|\leq\|Tx\|$ ($x\in H$).

Për operatorin T themi se është *unitarisht ekuivalent* me operatorin S nëse ekziston operatori unitar U i tillë që $S=U^*TU$.

Operatorët T dhe S quhen operatorë *dyfish komutativ* nëse $TS=ST$ dhe $TS^*=S^*T$.

Në punimin [3] autorët Y.Park dhe Ch. Ryoo lidhur me operatorët k^*-paranormalë kanë vërtetuar Teoremën në vazhdim.

Teorema 2.1 Një operator unitarisht ekuivalent me operatorin k^*-paranormal është operator k^*-paranormal.

Teorema vlen edhe për operatorin $2-k^*$ paranormal.

Teorema 2.2 Nëse $T\in L(H)$ është operator $2-k^*$ paranormal, atëherë edhe operatori unitarisht ekuivalent me operatorin T është operator $2-k^*$ paranormal.

Vërtetimi: Supozojmë se $S=U^*TU$, ku T është operator $2-k^*$ paranormal dhe U është operator unitar. Për çdo $x\in H$, kemi

$$\|S^{*2}x\|^k=\|(U^*TU)^{*2}x\|^k=\|(U^*T^*U)^2x\|^k=\|U^*T^{*2}Ux\|^k$$
$$=\|T^{*2}Ux\|^k\leq\|T^kUx\|^2=\|U^*T^kUx\|^2=\|(U^*TU)^kx\|^2=\|S^kx\|^2\cdot$$

Nga kjo marrim se operatori S është $2-k^*$ paranormal.

Rezultati i ngjashëm vlen edhe për operatorin $2-k$ paranormal.

Lema 2.3 Nëse $T\in L(H)$ është operator $2-k$ paranormal, atëherë edhe operatori unitarisht ekuivalent me operatorin T është operator $2-k$ paranormal.

Teorema 2.4 Nëse T është izometri dhe nëse T^* është $2-k^*$ paranormal, atëherë T është operator unitar.

Vërtetimi: Meqë T është izometri dhe T^* është $2-k^*$ paranormal, atëherë T është $2-k^*$ paranormal. Nga ana tjetër meqë çdo izometri është operator hipernormal, për çdo $x\in H$, kemi

$$\|x\|^k=\|T^*Tx\|^k\leq\|T^2x\|^k\leq\|T^{*k}x\|^2\|x\|^{k-2}$$

$$\leq\|TT^{*k-1}x\|^2\|x\|^{k-2}=\|T^{*k-2}x\|^2\|x\|^{k-2}$$

$$\leq\|T^*x\|^2\|x\|^{k-2}\leq\|Tx\|^2\|x\|^{k-2}=\|x\|^k$$

Nga kjo marrim se $\|Tx\|=\|x\|$ dhe $\|x\|=\|T^*x\|$ ($x\in H$) ose $T^*T=I$ dhe $TT^*=I$,

respektivisht. Rrjedhimisht, T është operator unitar.

Teorema 2.5 Le të jetë T operator $2-k^*$ paranormal, që komuton me një operator izometrik S. Atëherë, prodhimi TS është poashtu operator $2-k^*$ paranormal.

Vërtetimi: Le të jetë $x \in H$, $\|x\| = 1$. Atëherë,

$$\begin{aligned}\|(TS)^{*2}x\|^k &= \|S^{*2}T^{*2}x\|^k \le \|SS^*T^{*2}x\|^k \\ &= \|S^*T^{*2}x\|^k \le \|T^{*2}x\|^k \le \|T^k x\|^2 \\ &= \|ST^k x\|^2 = \|S^k T^k x\|^2 = \|(TS)^k x\|^2 \,(\\ x \in H,\ \|x\| &= 1).\end{aligned}$$

Prandaj, TS është operator $2-k^*$ paranormal. Rezultati i ngjashëm vlen edhe për operatorët nga klasa $2-k$ paranormal.

Lema 2.6 Le të jetë T operator $2-k$ paranormal, që komuton me një operator izometrik S. Atëherë prodhimi TS është poashtu operator $2-k$ paranormal.

Teorema 2.7 Le të jenë T dhe S operatorë $2-k^*$ paranormalë dhe dyfish komutativ. Nëse

$$\|T^{*2}x\|\|S^k x\| \le \|T^{*2}S^k x\|$$

$$(x \in H, k \ge 2)$$

atëherë, prodhimi TS është poashtu operator $2-k^*$ paranormal.

Vërtetimi: Supozojmë se

$$\|T^{*2}x\|\|S^k x\| \le \|T^{*2}S^k x\|$$

$$(x \in H, k \ge 2).$$

Meqë operatorët T dhe S janë dyfish komutativ dhe $2-k^*$ paranormalë, për çdo $x \in H$ dhe $k \ge 2$, kemi

$$\begin{aligned}&\|(TS)^{*2}x\|^k \|T^{*2}x\|^{k-2} \|S^k x\|^{k-2} = \|(S)^{*2}(T)^{*2}x\|^k \|T^{*2}x\|^{k-2} \|S^k x\|^{k-2} \\ &\le \|S^{*2}T^{*2}x\|^k \|T^{*2}S^k x\|^{k-2} \le \|S^k T^{*2}x\|^2 \|T^{*2}x\|^{k-2} \|T^{*2}S^k x\|^{k-2} \\ &= \|T^{*2}S^k x\|^k \|T^{*2}x\|^{k-2} \le \|T^k S^k x\|^2 \|T^{*2}x\|^{k-2} \|S^k x\|^{k-2} \\ &= \|(TS)^k x\|^2 \|T^{*2}x\|^{k-2} \|S^k x\|^{k-2}.\end{aligned}$$

Prej nga

$$\|(TS)^{*2}x\|^k \le \|(TS)^k x\|^2 \,(x \in H, k \ge 2).$$

D.m.th. TS është operator $2-k^*$ paranormal.

Lema 2.8 Le të jenë T dhe S operatorë $2-k$ paranormalë dhe dyfish komutativ. Nëse

$$\|T^2 x\|\|S^k x\| \le \|T^2 S^k x\| \,($$

$$x \in H, k \ge 2),$$

atëherë prodhimi TS është poashtu operator $2-k$ paranormal.

Teorema 2.9 Nëse T është operator $2-k^*$ paranormal, atëherë $r(T) \le \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$.

Vërtetimi: Le të jetë T operator $2-k^*$ paranormal. Atëherë,

$$\|T^{*2}x\|^k \le \|T^k x\|^2$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right).$$

Nga jobarazimi i fundit, marrim

$$\|T^2\|^k = \|T^{*2}\|^k \le \|T^k\|^2.$$

Prej këndej,

$$\|T^{2n}\|^k \le \left\|\underbrace{T^2T^2\cdots T^2}_{n-here}\right\|^k \le$$

$$\|T^2\|^{nk} \le \|T^k\|^{2n},$$

përkatësisht

$$\|T^{2n}\|^{\frac{1}{2n}} \le \|T^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Duke vepruar me limit në të dy anët kur $n \to \infty$ kemi $r(T) \le \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$.

Teorema 2.10 Nëse operatori T është normal, atëherë për $k \ge 2$, T është $2-k^*$ paranormal.

Vërtetimi: Nga fakti se operatori T është normal dhe në bazë të Teoremës 1.1, për çdo $x \in H$, kemi

$$\begin{aligned}\|T^k x\|^2 &= (T^k x \mid T^k x) = (T^{*k}T^k x \mid x) = ((T^*T)^k x \mid x) \\ &\ge ((T^*T)^2 x \mid x)^{\frac{k}{2}} = (T^2T^{*2}x \mid x)^{\frac{k}{2}} = \|T^{*2}x\|^k \,(k \ge 2)\cdot\end{aligned}$$

Nga kjo rrjedh se klasa e operatorëve normalë përmbahet në klasën e operatorëve $2-k^*$ paranormalë ($k \ge 2$).

Lema 2.11 Nëse operatori T është normal, atëherë për $k \geq 2$, T është $2-k$ paranormal. Nga kjo rrjedh se klasa e operatorëve normalë përmbahet në klasën e operatorëve $2-k$ paranormalë.

Lema 2.12 Nëse T është operator $2-k^*$ paranormal, atëherë

$$T^* \in cllas(M,2) \quad \Rightarrow$$
$$T \in cllas(M,k)^* \ (k \leq 2).$$

Vërtetimi: Meqë $T^* \in cllas(M,2)$ atëherë

$$T^2T^{*2} \geq (TT^*)^2 \qquad (1)$$

dhe meqë T është operator $2-k^*$ paranormal kemi

$$\|T^k x\|^2 \geq \|T^{*2}x\|^k \ \left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$

ose

$$\|T^k x\|^4 \geq \|T^{*2}x\|^{2k} \ \left(x \in H, \|x\| = 1\right) \qquad (2)$$

Nga (1) , (2) dhe në bazë të Teoremës 1.1 për $k \leq 2$, kemi

$$(T^{*k}T^k x \mid x)^2 \geq (T^2T^{*2}x \mid x)^k$$

$$\geq (((TT^*)^2 x \mid x)^{\frac{k}{2}})^2 \geq ((TT^*)^k x \mid x)^2$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$

prej nga

$$(TT^*)^k \leq T^{*k}T^k \ (k \leq 2)$$

dhe $T \in cllas(M,k)^* \ (k \leq 2)$.

Lema 2.13 Nëse T është operator $2-k$ paranormal dhe hipernormal, atëherë.

$$T \in cllas(M,k)^* (k \leq 2)$$

Vërtetimi: Meqë T është hipernormal kemi

$$\|T^* x\| \leq \|Tx\| \ \left(x \in H\right),$$

ose

$$\|TT^* x\| \leq \|T^2 x\| \ \left(x \in H\right).$$

Meqë T është operator $2-k$ paranormal kemi

$$\|TT^* x\|^{2k} \leq \|T^2 x\|^{2k} \leq \|T^k\|^4$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right),$$

përkatësisht,

$$\left(\left((T^*T)^2 x \mid x\right)^{\frac{k}{2}}\right)^2 \leq (T^{*k}T^k x \mid x)^2$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right). \qquad (3)$$

Në bazë të Teoremës 1.1 për $k \leq 2$, marrim

$$\left((TT^*)^k x \mid x\right)^2 \leq \left(\left((T^*T)^2 x \mid x\right)^{\frac{k}{2}}\right)^2$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right). \qquad (4)$$

Nga (3) dhe (4) rrjedh

$$(TT^*)^k \leq T^{*k}T^k.$$

D.m.th. $T \in cllas(M,k)^* (k \leq 2)$.

Lema 2.14 Nëse operatori T është $2-k^*$ paranormal dhe operatori T^* është paranormal, atëherë operatori T është hipernormal.

Vërtetimi: Meqë T është operator $2-k^*$ paranormal, atëherë

$$\|T^{*2}x\|^{2k} \leq \|T^k x\|^4$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right),$$

përkatësisht

$$(T^2T^{*2}x \mid x)^k \leq (T^{*k}T^k x \mid x)^2$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right). \qquad (5)$$

Nga ana tjetër, meqë T^* është operator paranormal, kemi

$$\|T^{*2}x\| \geq \|T^* x\|^2$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right),$$

përkatësisht

$$\left(T^2T^{*2}x \mid x\right)^k \geq \left(TT^* x \mid x\right)^{2k}$$

$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right) \qquad (6)$$

Nga (5) dhe (6) kemi

$$\left(TT^*x \mid x\right)^{2k} \le (T^2T^{*2}x \mid x)^k \le (T^{*k}T^kx \mid x)^2$$
$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right). \quad (7)$$

Në bazë të Teoremës 1.1 kemi

$$((T^*T)^k x \mid x)^2 \le (TT^*x \mid x)^{2k}$$
$$\left(k \le 1\right). \qquad (8)$$

Më në fund nga (7) dhe (8) marrim

$$(TT^*)^k \le T^{*k}T^k \ (k \le 1).$$

Për $k = 1$ marrim

$$TT^* \le T^*T$$

Prej nga rrjedh se operatori T është hipernormal.

Lema 2.15 Operatori T është $2-k^*$ paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, nëse

$$z^2 + 2z(T^2T^{*2}x \mid x)^{\frac{k}{4}} + (T^{*k}T^kx \mid x) \ge 0$$
$$\left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right).$$

Vërtetimi: Duke shfrytëzuar përkufizimin e operatorit $2-k^*$ paranormal, kemi

$$\left\|T^{*2}x\right\|^k \le \left\|T^kx\right\|^2 \quad \left(x \in H, \|x\| = 1\right),$$

prej nga

$$4\left\|T^{*2}x\right\|^k - 4\left\|T^kx\right\|^2 \le 0 \quad \left(x \in H, \|x\| = 1\right).$$

Nga kjo marrim

$$z^2 + 2z\left\|T^{*2}x\right\|^{\frac{k}{2}} + \left\|T^kx\right\|^2 \ge 0$$
$$\left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right).$$

Duke e shpreh normën me anë të produktit skalar kemi jobarazimin e kërkuar

$$z^2 + 2z(T^2T^{*2}x \mid x)^{\frac{k}{4}} + (T^{*k}T^kx \mid x) \ge 0$$
$$\left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right).$$

Teorema 2.16 Nëse T është operator $2-k^*$ paranormal dhe nëse $Tx = \alpha x$, atëherë $T^{*2}x = \bar{\alpha}^2 x$ ($k \ne 2$, $x \in H, \|x\| = 1, \alpha \in \mathbf{C}$).

Vërtetimi: Nëse operatori T është $2-k^*$ paranormal, atëherë nga Lema 2.15 kemi

$$z^2 + 2z(T^2T^{*2}x \mid x)^{\frac{k}{4}} + (T^{*k}T^kx \mid x) \ge 0$$
$$\left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right).$$

Për $k = 4n \ne 2$, marrim

$$z^2 + 2z(T^2T^{*2}x \mid x)^n + (T^{*4n}T^{4n}x \mid x) \ge 0$$
$$\left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right)$$

$$z^2 + 2z(T^2T^{*2}x \mid x)^n + (T^{4n}x \mid T^{4n}x) \ge 0$$
$$\left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right),$$

Nga

$$(T^kx \mid x) \ge (Tx \mid x)^k$$
$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$

dhe nga $Tx = \alpha x$ ($\alpha \in \mathbf{C}$), kemi

$$z^2 + 2z(T^2T^{*2}x \mid x)^n + (\alpha^{4n}x \mid \alpha^{4n}x) \ge 0 \ \left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right)$$
$$\Rightarrow z^2 + 2z(T^2T^{*2}x \mid x)^n + |\alpha^{4n}|^2 \ge 0 \ \left(z \in \mathbf{R},\ x \in H,\ \|x\| = 1\right)$$
$$\Rightarrow (T^2T^{*2}x \mid x)^{2n} \le |\alpha^{4n}|^2 \ \left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$
$$\Rightarrow (T^{*2}x \mid T^{*2}x)^{2n} \le |\alpha|^{8n} \ \left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$
$$\Rightarrow \left\|T^{*2}x\right\|^{4n} \le |\alpha|^{8n} \ \left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$
$$\Rightarrow \left\|T^{*2}x\right\|^2 \le |\alpha|^4 \ \left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$

Nga jobarazimi i fundit marrim

$$\left\|T^{*2}x - \bar{\alpha}^2x\right\|^2 = (T^{*2}x - \bar{\alpha}^2x \mid T^{*2}x - \bar{\alpha}^2x) = \left\|T^{*2}x\right\|^2 - |\alpha|^4 \le 0$$
$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right)$$

d.m.th.

$$\left\|T^{*2}x - \bar{\alpha}^2x\right\| \le 0$$
$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right).$$

Prej nga kemi

$$T^{*2}x - \bar{\alpha}^2x = 0$$
$$\left(x \in H, \|x\| = 1\right),$$

ose

$$T^{*2}x = \bar{\alpha}^2x$$
$$(x \in H, \|x\| = 1, \alpha \in \mathbf{C}).$$

Lema 2.17 Le të jetë T operator i çvendosjes së dyanshme me vargun e peshave α_n. Operatori T është $2-k^*$ paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur
$|\alpha_{n-1}|^k|\alpha_{n-2}|^k \leq |\alpha_n|^2|\alpha_{n+1}|^2 \cdots |\alpha_{n+k-1}|^2$.

Shembulli 1 Le të jetë T operator i çvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave α_n të përkufizuar si vijon:

$$\alpha_n = \begin{cases} 1/3, & n \leq -1, \\ 1, & n = 0, \\ 1/3, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \\ 1/9, & n = 3, \\ 9, & n \geq 4. \end{cases}$$

Pas llogaritjeve të bëra arrijmë në përfundim se operatori i tillë është $2-k^*$ paranormal për $k \geq 2$ por jo për $k = 3$. Dmth operatori i tillë nuk është $2-3^*$ paranormal.

LITERATURA

[1] T.Furuta, On the class of paranormal operators, Proc japan Acad 43 (1967), 594-598.
[2] T. Furuta, Invitation to linear operators, London and New York, 2001.
[3]Y. Park, CH.Ryoo, Some results on k^*-paranormal operators, East Asian Math J. 14 (1998), No 1, pp. 27-34.
[4] S.C. Arora, J.K. Thukral, On a class of operators, Glasnik Math 21(41)(1986), 381-386.
[5] N. Chennappan, S. Karthikeyan, *-Paranormal Operators, Indian J. Pure Appl. Math., 31(6), (2000), 591-600.